28б.

IАСС

Iаксимальное время выполнения заданий: 240 мин.
се задания по 7 баллов

г два различных ненулевых целых корня a и b.
ет быть равен корень a? (Приведите все ответы и

акие, что НОД$(x; y)$ + НОК$(x; y) + x + y = 2019$?

асающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите

ьным», если в нём все цифры различные, оно
торого числа его цифр можно получить число 2018.
ательных» чисел?

артфона, где разрешается проводить алхимические
т «огонь» и один элемент «камень», получится один
металл» и один элемент «камень», то получится три
ентов «огонь» и 50 элементов «камень». Для
н элемент «металл», два элемента «огонь» и три
тов X сможет получить Лена?

ФИО Жюри	код ученика: Д-11-10-5					ИТОГО	подпись жюри
	Практический тур						
	зд 1	зд 2	зд 3	зд 4	зд 5		
Куракина О.Н.	7 б	7 б.	6 б	1 б	7 б.	28 б.	
Петрова Е.Л.	7 б	7 б	6 б	1 б	7 б	28 б	
Афанасьев А.С.	7 б	7 б	6 б	1 б	7 б	28 б	

Д-М-10-5 28б.

10 КЛАСС

Максимальное время выполнения заданий: 240 мин.
Все задания по 7 баллов

1. Квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня a и b. Известно, что $a + p$ делится на $q - 2b$. Чему может быть равен корень a? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

2. Существуют ли натуральные числа x и y такие, что $\text{НОД}(x; y) + \text{НОК}(x; y) + x + y = 2019$?

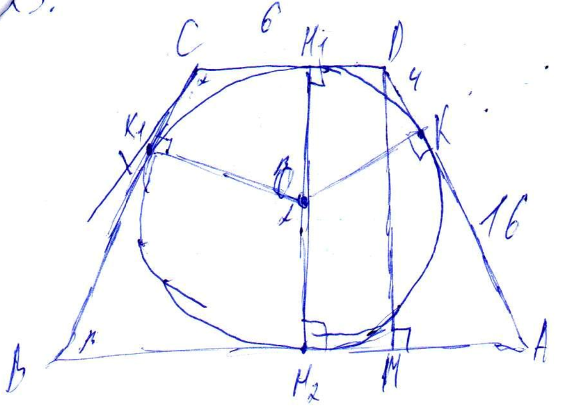
3. В трапецию $ABCD$ вписана окружность, касающаяся боковой стороны AD в точке K. Найдите площадь трапеции, если $AK = 16$, $DK = 4$ и $CD = 6$.

4. Назовём натуральное число «замечательным», если в нём все цифры различные, оно не начинается с цифры 2 и при вычеркивании некоторого числа его цифр можно получить число 2018. Сколько существует различных семизначных «замечательных» чисел?

5. Лена скачала новую игру для своего смартфона, где разрешается проводить алхимические реакции двух типов. Если она соединит один элемент «огонь» и один элемент «камень», получится один элемент «металл». А если соединит один элемент «металл» и один элемент «камень», то получится три элемента «камень». У Лены имеется 50 элементов «огонь» и 50 элементов «камень». Для приготовления элемента X необходимо взять один элемент «металл», два элемента «огонь» и три элемента «камень». Какое наибольшее число элементов X сможет получить Лена?

Решения: стр. 2

3.



Решение:

По теореме о ~~длинах~~ ~~отрезков~~ касательных отрезков: $AH_2 = 16$; $DH_1 = 4$.

DM — высота

$AM = 16 - 4 = 12$

По теореме Пифагора:

$DM = \sqrt{400 - 144} = 16$

$r = 8 \quad h = 16$

По теореме о длинах касательных отрезков: $CK_1 = CH_1 = 2$; $BH_2 = BK_1$.

По теореме косинусов:

$K_1H_1 = 2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos\angle = 2 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cos B \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle = 16\cos B - 15$; $\qquad BH_2 = x$

$K_1H_2 = 2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot \cos B = 2 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^2 \cdot \cancel{\cos}(16\cos B - 15) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2(1 - \cos B) = 8^2 \cdot 16(1 - \cos B) \Rightarrow x = \sqrt{8^2 \cdot 16} = \sqrt{2^{10}} =$

$= 2^5 \qquad BH_2 = 2^5 = 32$

$AB = 32 + 16 = 48$

$S_{\square ABCD} = h \cdot \frac{AB + CD}{2} = 16 \cdot \frac{48 + 6}{2} = 432$

Ответ: 432

. Дано: x^2+px+q (1) и $\frac{a+p}{q-2b}$ – целочисленное (2). Так как (1) квадратный трёхчлен, то его мы можем представить как $(x-a)(x-b) \Rightarrow p=-(a+b)$; $q=ab$. Подставляем значения в (2): $\frac{a-a-b}{ab-2b} = \frac{-b}{b(a-2)} = -\frac{1}{a-2}$. Так как знаменатель не может быть равен нулю и данное выражение целочисленное, то $a=3$ и 1 ~~и только 3~~. При остальных значениях $-\frac{1}{a-2}$ не целочисленное. (a тоже должен быть целочисленен исходя из условия).

2.

В примере (НОД$(x;y)$+НОК$(x;y)+x+y=2019$) мы видим, что, так как 2019 нечётное, то слагаемых или один, или три нечётных числа.
Теперь рассмотрим все случаи чётности и нечётности x и y при $x>y$:

1) x – чёт; y – нечёт: $x=пр_1\cdot 2^n$ $y=пр_2^k\cdot пр_3^m$, где $пр_{1,2,3}$ – простое нечётное число; n,k,m – степени (совершенно любые лишь бы $x>y$). При таких значениях НОК$(x;y)=1$ – нечёт (или $пр_1$, если оно общее), а НОД $=xy=пр_1\cdot пр_2^k\cdot пр_3^m\cdot 2^n$ – чётное. Получаем: чётное, нечётное, чётное, нечётное. (Даже если значение y > значения x).

2) Оба нечётные: $x=пр_1^k$ $y=пр_2^n$ (или $x=пр_1^k$, $y=пр_2^n\cdot пр_1^m$) x. При этих значениях НОК$(x;y)=1$ или $пр_1^m$ – нечёт, а НОД$(x;y)=xy$ или $пр_1^k\cdot пр_2^n$ – нечёт. Получаем: нечёт, нечёт, нечёт, нечёт.

3) оба чётные x. Тогда НОК $=2^n$, а НОД$(x;y)$ = какому-то числу умноженному на 2^m (при $m\geq n$). Все чётные.

Ответ: не существует таких x и y, при которых НОД$(x;y)$+НОК$(x;y)$+$x+y=2019$, потому что при любых значениях x и y НОД$(x;y)$+НОК$(x;y)+x+y$ – будет чётным.

5. Допустим у неё получилось получить максим. X элементов $=n$. Тогда в n_{x} входит $n_м$, $2n_о$ и $3n_к$ где м – металл, о – огонь, к – камень. Из условия мы знаем, что в $n_м$ входит $n_о$ и $n_к$. Получается в n_x исп. $3n_о$ и $4n_к$. ~~В~~.

В реакции получения 3к из 1м мы понимаем, что 1о стал 1к. Кол-во камней и огня должно совпадать. Получается ~~что~~ $0{,}5n_о$ ~~пере~~ превратил в ~~камень~~ $0{,}5n_к$.
$\Rightarrow 3{,}5n \approx 50 \Rightarrow n\approx \cancel{16}\,14$ ~~Ответ: 16~~ (потому что кол. используемых элементов

цесе). Значит она использовала 49 элементов огня и ~~во~~ камня для получения 14 х элементов. Ответ: 14. ~~Максимальное~~.

4. Представим это число как $\overline{abcdefg}$, где $a \neq 2$ и $a \neq 0$. Четыре из этих цифр равны 2; 0; 1; 8. Теперь подсчитываем варианты ~~сов~~:

$8 \cdot 10 \cdot 10$ — разновидность a и двух незанятых цифр. $= 800$

$6 \cdot 5$ — как расставить двое незанятые цифры $= 30$

$30 \cdot 800$ — вариативность ~~расстановки~~ числа без учёта совпадений $= 24000$

(Мне придётся считать совпадения ~~дух~~ расстановки двух св. цифр, т.к. я их посчитал как ~~выбор~~ зависимый выбор позиции.

Подсчитываем совпадения:

~~11 — совпадение значений двух незанятых цифр~~ ~~(значение цифры)~~

~~$3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!$ — разновидностей расстановки 2; 0; 1; 8 = 648~~

~~$4 \cdot 4$ — совпадения двух свободных цифр с 2; 0; 1; 8 = 16 (значений)~~

~~10 — совпадения общее кол-во совпадений = 648 · 16 = 10368~~

~~4 — совпадение при одной из 2; 0; 1; 8~~

совпадений при одном свободном равному одному из ~~свободных чи~~ 2; 0; 1; 8. $= \cancel{5}4 \cdot 9 + 1 \cdot 9 = 45$

совпадений при двух свободных цифр равных одному из 2; 0; 1; 8 $= 2$

кол-во ~~зн~~ опр. цифр $= 4$

всего совпадений $=$ ~~$8 \cdot 9 \cdot 4 + 28 \cdot 2 \cdot 4$~~ $8 \cdot 45 \cdot 4 + 8 \cdot 2 \cdot 4$, где 8 ~~кол~~ — кол-во разновидностей a. $=$ ~~$224 \cdot 9 =$~~ ~~1~~1504

Чисел, которые можно назвать замечательными 22496.

Сверено (Афанасьев А. С.)